http://CursoDeCalculo.com
Profesor Raúl Vega Muñoz

EJERCICIOS DE DERIVADAS

EJERCICIOS RESUELTOS DE DERIVADAS POR EL MÉTODO DE LOS 4 PASOS O REGLA DE LOS 4 PASOS O COCIENTE DE INCREMENTOS. (ES LO MISMO)

Dada la siguiente función, hallar su derivada mediante la regla de los 4 pasos.

$$y = \frac{c}{x^2}$$

Paso #1 Incrementar ambas variables

$$y + \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2}$$

$$y + \Delta y = \frac{c}{x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2}$$

Paso #2 Restar miembro a miembro la función original de la función incrementada.

Con manzanas: "Al lado izquierdo le restas el lado izquierdo, al lado derecho le restas el lado derecho"

$$y + \Delta y - y = \frac{c}{x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2} - \frac{c}{x^2}$$

$$\Delta y = \frac{c}{x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2} - \frac{c}{x^2}$$

$$\Delta y = \frac{cx^2 - c(x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2)}{(x^2)(x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2)}$$

$$\Delta y = \frac{cx^2 - cx^2 - 2cx\Delta x - c[\Delta x]^2}{(x^2)(x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2)}$$

$$\Delta y = \frac{-2cx\Delta x - c[\Delta x]^2}{(x^2)(x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2)}$$

EJERCICIOS DE DERIVADAS

Para facilitar el paso que sigue de una vez se extrae el factor común Δx del numerador. No se desarrrolla ninguna otra operación.

$$\Delta y = \frac{(-2cx - c\Delta x)(\Delta x)}{(x^2)(x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2)}$$

Paso #3 Dividir ambos miembros de la ecuación sobre Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{(-2cx - c\Delta x)(\Delta x)}{(x^2)(x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2)}}{\Delta x}$$

Nota: Observa que a la expresión entera Δx del denominador se le agrega un 1 abajo. Es matemática básica de secundaria.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{(-2cx - c\Delta x)(\Delta x)}{(x^2)(x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2)}}{\frac{\Delta x}{1}}$$

Se plica la famosísima regla del sándwich extremo por extremo arriba y medio por medio abajo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(-2cx - c\Delta x)(\boldsymbol{\Delta x})}{(x^2)(x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2)(\boldsymbol{\Delta x})}$$

Como podrás notar, los términos Δx (en color rojo) del numerador y denominador que quedan aislados en paréntesis se eliminan.

Quedaría así:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(-2cx - c\Delta x)}{(x^2)(x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2)}$$

Podemos quitar el paréntesis del numerador sin problemas

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2cx - c\Delta x}{(x^2)(x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2)}$$

EJERCICIOS DE DERIVADAS

No se hace nada mas. Pasamos al paso 4.

Paso #4 Aplicar el límite cuando Δx tiende a cero a ambos miembros de la ecuación.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2cx - c\Delta x}{(x^2)(x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2)}$$

Para lo que respecta al lado izquierdo (miembro 1) de la ecuación, por definición equivale a la derivada.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Queda:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2cx - c\Delta x}{(x^2)(x^2 + 2x\Delta x + [\Delta x]^2)}$$

En cuanto al lado derecho (miembro 2) solo basta eliminar los términos que aun contienen Δx puesto que tiende a convertirse en cero, puedes visualizarlos en color rojo:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2cx - \boldsymbol{c\Delta x}}{(x^2)(x^2 + \boldsymbol{2x\Delta x} + [\Delta x]^2)}$$

Al aplicar el límite queda:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2cx - \mathbf{0}}{(x^2)(x^2 + \mathbf{0} + \mathbf{0})}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2cx}{(x^2)(x^2)}$$

EJERCICIOS DE DERIVADAS

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2cx}{x^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2c}{x^3}$$

Nota para ***Noobsters***: Si te preguntas cosas simples de secundaria como ¿Por que queda 3 en el exponente y no 4? Observa que se eliminó una x de arriba con una x de abajo.

$$\frac{-2cx}{x^4} = \frac{-2c\cancel{x}}{x \cdot x \cdot x \cdot \cancel{x}} = \frac{-2c}{x \cdot x \cdot x} = -\frac{2c}{x^3}$$

Otra nota para ***Noobsters***: Si te preguntas cosas simples de secundaria como ¿Por que el signo queda en medio? es que se dividió menos entre mas. Da menos. Se le pone a la fracción. Esto lo debes saber desde la secundaria.