http://CursoDeCalculo.com
Profesor Raúl Vega Muñoz

# LÍMITES

## FUNCIONES A TROZOS (*FUNCIONES POR PARTES*)

Las funciones a trozos también son conocidas como funciones definidas por partes o funciones determinadas por más de una ecuación. En este ensayo vamos a ver varios ejercicios resueltos de límites para funciones de esta categoría.

**Instrucciones**: Para cada una de las siguientes funciones definidas por partes (funciones a trozos) trazar la gráfica y determinar los siguientes límites (*si existen*).

Límite por la izquierda cuando x tiende a 1

$$\lim_{x \to 1^-} f(x)$$

Límite por la derecha cuando x tiende a 1

$$\lim_{x \to 1^+} f(x)$$

Por definición, el límite como tal (sin aclarar por la izquierda o por la derecha) existe si y solo si se cumple la existencia del límite por la izquierda, el límite por la derecha y si ambos son iguales.

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

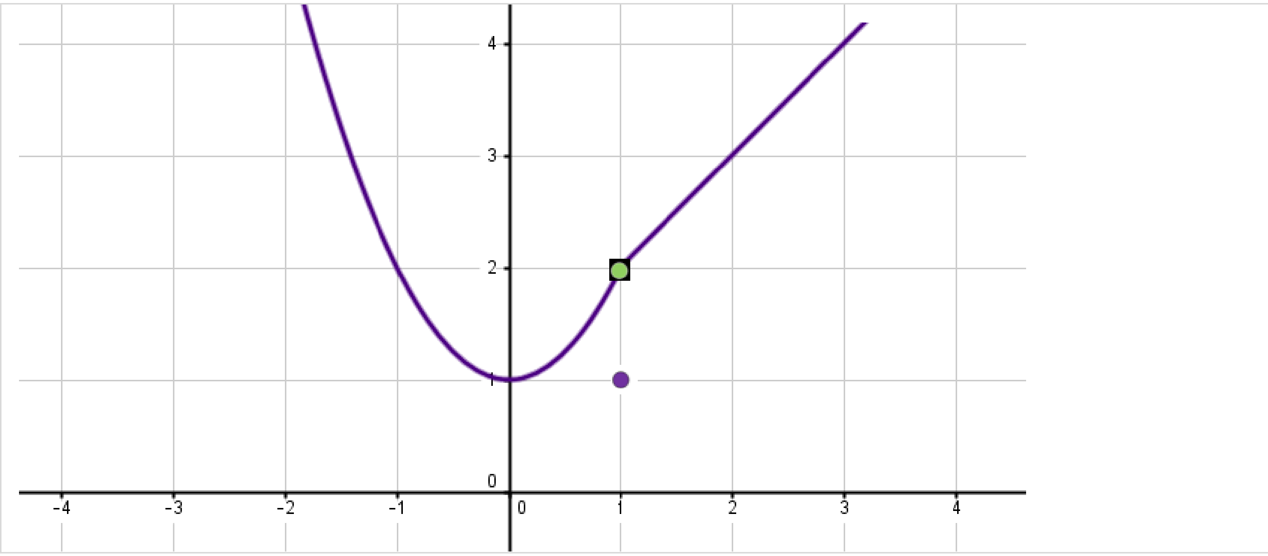
Recuerda que vamos a buscar estos tres límites para cada una de las funciones que se presentan a continuación.

Para facilitar la comprensión las gráficas se realizaron mediante software graficador ya que nuestro objetivo no es ver cómo se grafica cada función sino analizar el comportamiento en las inmediaciones del valor $x = 1$. Si es obligatorio para ti graficar "a mano" o simplemente lo haces por pasatiempo, recuerda realizar una tabla de valores asignando valores a "x" y sustituyendo según corresponda en cada función, para encontrar los valores correspondientes de y, para ello es aconsejable que asignes a x los valores inmediatamente cercanos al valor crítico $x = 1$, tanto por la izquierda (es decir, valores decimales muy cercanos a 1 que estén entre 0 y 1 como 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8) y valores por la derecha (es decir, valores decimales muy cercanos a 1 que estén entre 1 y 2 como 2, 1.8, 1.6, 1.4, 1.2) de esa forma obtendrás una aproximación numérica al límite por la izquierda y por la derecha para cada función.

Antes que nada recuerda un concepto muy importante: un límite es siempre un valor al que se aproxima la variable y. Es un valor de y, no de x.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si \quad x<1 \\ 1 & si \quad x=1 \\ x+1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

La gráfica de la función $f(x)$ es la que se muestra en seguida:




Observamos que en el intervalo $(-\infty,1)$ la gráfica de $f(x)$ es similar a una parábola, obedeciendo la ecuación cuadrática que determina esa región de la curva, pero la gráfica se interrumpe en el valor $x=1$. Justamente en el valor $x=1$ la gráfica correspondede a la recta horizontal $y=1$, pero como solo está definida para ese único valor, en vez de ver una recta vemos solamente un punto: el punto $(1,1)$. Finalmente en el intervalo $(1,\infty)$ la gráfica es similar a la recta oblícua $y=x+1$.

Podemos apreciar que los cambios más importantes desde el punto de vista gráfico ocurren en el valor $x=1$ y sus inmediaciones.

Calculamos el límite cuando x tiende a 1 por la izquierda.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

Podemos apreciar que a medida que los valores de $x$ se aproximan a $x=1$ desde la izquierda, los valores de y se aproximan a 2. Nota que no nos interesa el valor de la función en $x=1$

Concluimos que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$$

De forma análoga, podemos calcular el límite por la derecha.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

Porque también, vemos que a medida que los valores de x se aproximan a 1 desde la derecha los valores de y tienden a 2.

Como ambos limites son iguales concluimos que el límite como tal es 2:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Como podemos ver, la función toma el valor "1" en $x = 1$ o sea:

$$f(1) = 1$$

Esto no influye en la existencia o no existencia de un límite, como lo hemos en la sección de teoría sobre criterios de continuidad y existencia de un limite. El hecho de que el valor del límite no es igual al valor de la función en $x = 1$ significa que la función no es continua en $x = 1$, sino que es discontinua, recordemos que para que una función sea continua en un valor x determinado, el límite en ese valor debe coincidir con el valor de la función, aquí no sucede esto.

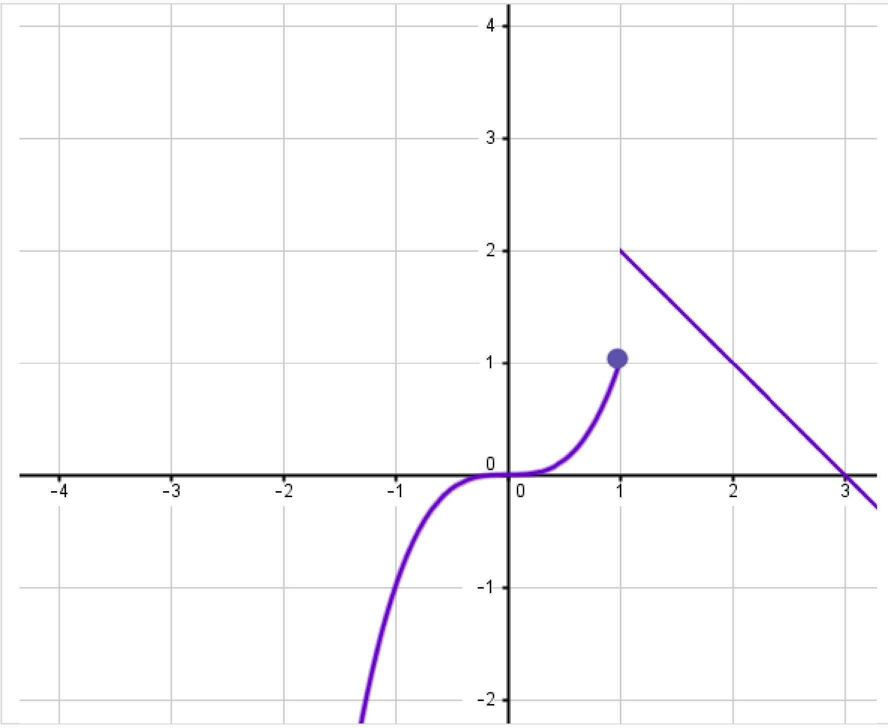
$$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$$

$$2 \neq 1$$

Por ende, no es continua en ese valor. Pero el límite si existe.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \leq 1 \\ 3 - x & si \quad x > 1 \end{cases}$$

La gráfica de la función $f(x)$ es la que se muestra en seguida:




Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

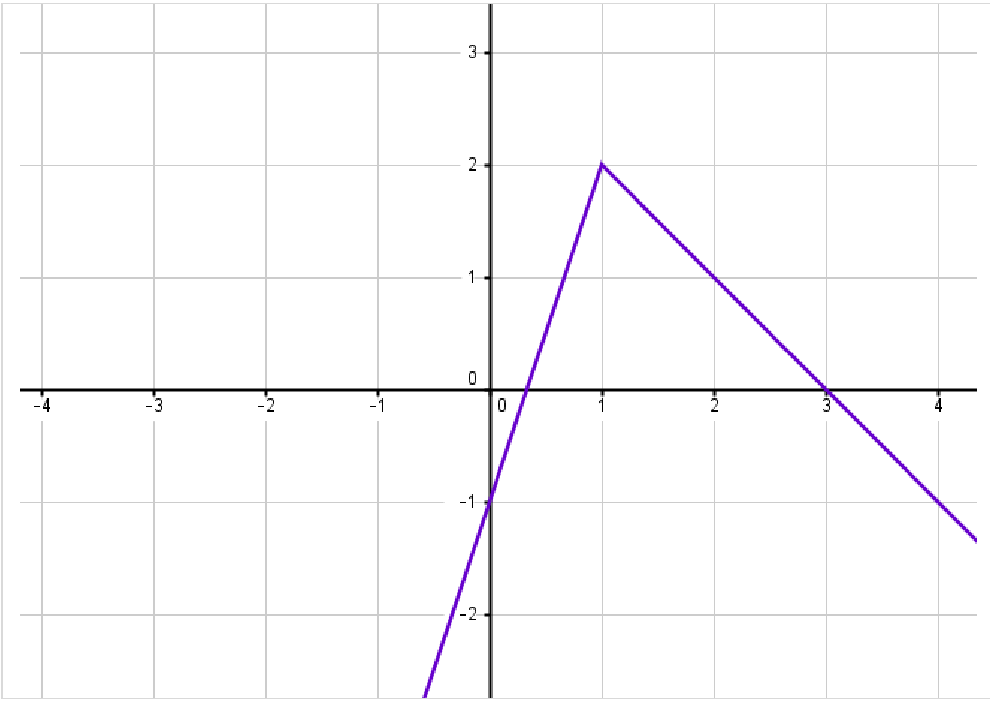
Los límites por la izquierda y por la derecha no coinciden por lo tanto no existe el límite de la función cuando x tiende a 1. El límite es conjunto vacío.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \emptyset$$

No es lo mismo el valor del límite que el valor de la función $f(1) = 1$, estamos ante una función que no tiene límite cuando x tiende a 1 pero si está definida en $x = 1$. Por lo tanto no es continua (o sea es discontinua en x=1).

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & si \quad x \leq 1 \\ 3 - x & si \quad x > 1 \end{cases}$$

La gráfica de la función $f(x)$ es la que se muestra en seguida:




Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$

Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

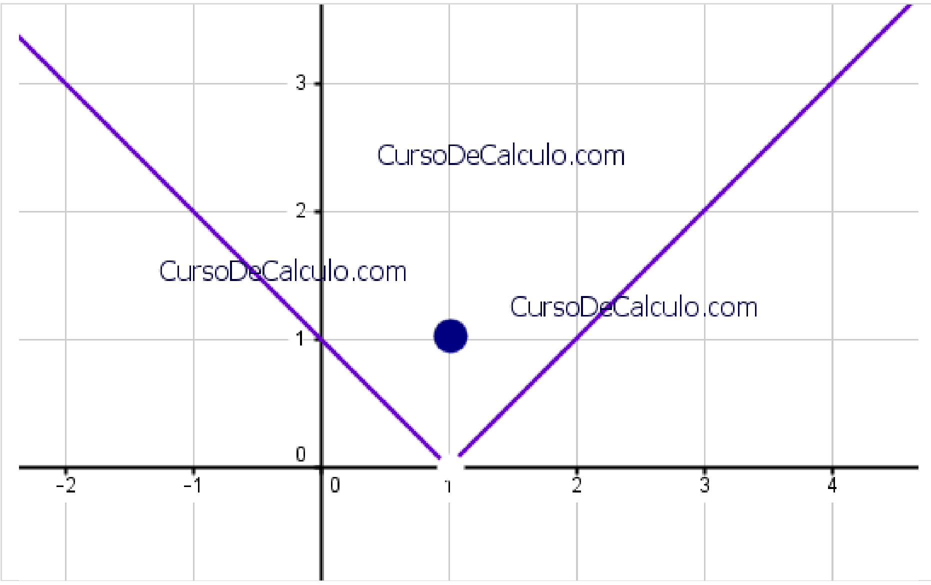
Concluimos que el límite si existe

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Además si  es continua porque el límite coincide con $f(1) = 2$

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| & si\ x \neq 1 \\ 1 & si\ \ x = 1 \end{cases}$$

La gráfica de la función $f(x)$ es la que se muestra en seguida:




Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$

Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

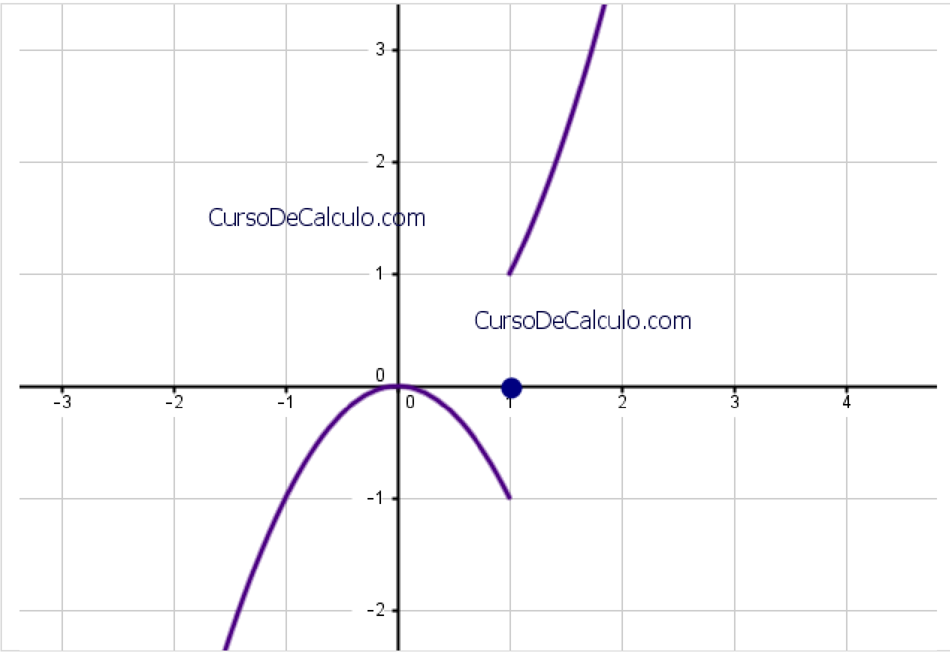
En conclusión el limite si existe y es:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

No es continua porque el valor del limite cuando x tiende a 1 difiere del valor $f(1) = 1$ por lo tanto decimos que es discontinua en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1}x^2 & si\ x \neq 1 \\ 0 & si\ \ x = 1 \end{cases}$$

La gráfica de la función $f(x)$ es la que se muestra en seguida:




Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$$

Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

En conclusión el limite no existe

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \emptyset$$

Obviamente no es continua porque no existe limite. El valor de $f(1) = 0$

http://CursoDeCalculo.com
Profesor Raúl Vega Muñoz

Este documento aun está en proceso de edición, vuelve por aquí pronto para ver los avances, descárgalo y compártelo en tus redes sociales.