LÍMITES Y CONTINUIDAD

EJERCICIOS RESUELTOS DE LÍMITES Y CONTINUIDAD EN FUNCIONES RACIONALES

Dada la siguiente función racional:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$$

Determinar $f(-2)$

Observa que tanto el numerador como el denominador son expresiones factorizables, si hiciéramos la factorización no podríamos ver que existen factores comunes en el numerador y el denominador que se podrían eliminar, para llevar la función "a su mínima expresión" o sea, a su forma simplificada, entonces si hiciéramos la sustitución directa sin factorizar obtendríamos una indeterminación 0/0:

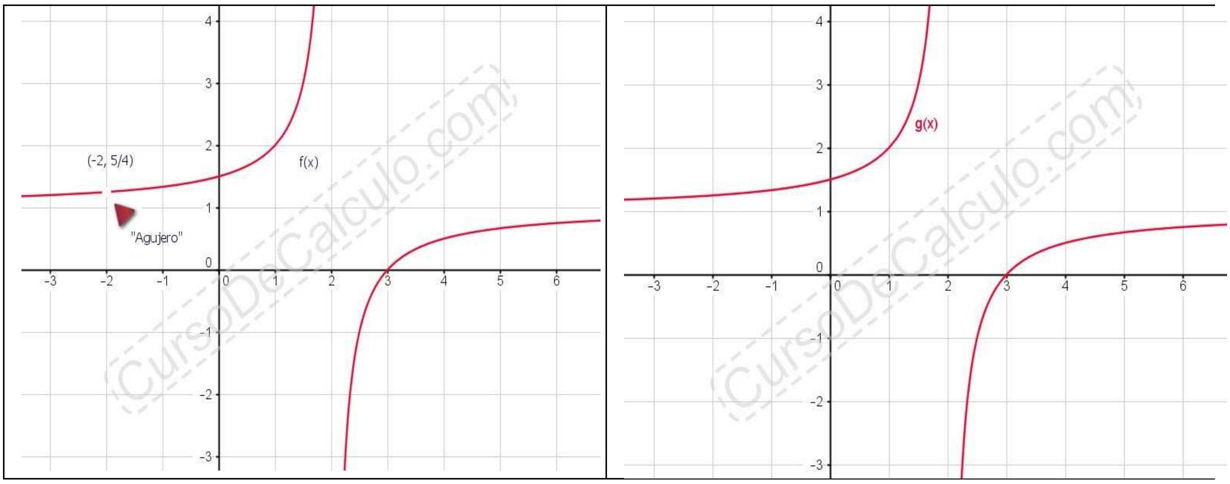
$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - (-2) - 6}{(-2)^2 - 4} = \frac{4 + 2 - 6}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

Factorizando y eliminando factores comunes del numerador y denominador obtenemos la función $g(x)$ que aunque no es exactamente la misma, pero gráficamente es muy similar a $f(x)$ solo que no presenta el "agujero" en el valor $x = -2$ (Ver Figura 1)

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$$

$$g(x) = \frac{\cancel{(x+2)}(x-3)}{(x-2)\cancel{(x+2)}} \quad \therefore \quad g(x) = \frac{(x-3)}{(x-2)}$$

Figura 1: Gráficas de $f(x)$, la función sin simplificar, a la izquierda y $g(x)$, la función simplificada a la derecha.



Determinar $\lim_{x \to -2} f(x)$

Para evitar la indeterminación 0/0 se hicieron factorizaciones, de forma análoga a como lo hicimos al llevar la función a su mínima expresión en el apartado anterior.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-3)}{(x-2)} = \frac{-2-3}{-2-2} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

Esto quiere decir que en las inmediaciones de el valor $x = -2$ la función va tomando valores cada vez más cercanos a 5/4 sin llegar a ser exactamente 5/4, tal como lo indica la definición de límite.

¿Cuál es la trascendencia de todo esto?

Por definición, una función es continua en un valor determinado $x = c$ si y solo si se cumplen 3 condiciones:

1. Que la función esté definida en $x = c$, o sea que exista $f(c)$

$$f(c) =$$

2. Que exista el límite de$f(x)$ cuando x tiende a "c"

$$\lim_{x \to c} f(x) =$$

3. Que $f(c)$ sea exactamente igual al límite de$f(x)$ cuando x tiende a "c"

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$$

Como podemos observar, la función $f(x)$ del apartado anterior no cumple con la primera condición porque no extá definida para x=-2, aunque si existe el límite cuando x tiende a -2. Por obvias razones no se cumple la tercera condición. Si no es tan obvio déjame explicarte: si no existe la primera condición ¿cómo podrían ser iguales?

El hecho de que f(x) no cumpla las tres condiciones anteriores significa que no es continua en x=-2 o dicho de otra forma, que la función es discontinua en ese punto, lo que se puede ver como un agujero en la gráfica de f(x) en la Figura 1.

La gráfica de g(x) es continua porque se eliminaron los factores que causaban el conflicto. En términos precisos las funciones f(x) y g(x) del apartado anterior no son exactamente equivalentes pero g(x) representa una versión más adecuada para trabajar que f(x), porque es una función continua, simplificada a su mínima expresión.

http://CursoDeCalculo.com
Profesor Raúl Vega Muñoz

SI TE GUSTA ESTA LECCIÓN COMPÁRTELA EN TUS REDES SOCIALES. SI AUN NO CONOCES CURSODECALCULO.COM TE ESTÁS PERDIENDO DE UN CURSO COMPLETO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. ¿QUIERES PERDÉRTELO?

Tópico Opcional:

¿Cómo se grafica f(x) a mano?

Si eres alérgico(a) a la tecnología y deseas graficar en hojas milimétricas, a la vieja usanza, sigue estos pasos.

Obtener dominio

Para obtener el dominio se buscan los valores excluidos del denominador (valores prohibidos) igualando el denominador a cero:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4 \quad \therefore \quad x_1 = -2 \qquad x_1 = 2$$

$$Df = \{x \in R : \ x \neq -2, \ x \neq 2\}$$

Traducción: El dominio de la función consiste en todas las x que pertenecen a los números reales, de tal modo que x sea diferente de 2
y diferente de -2.

Obtener rango

Aplicamos un límite cuando x tiende a infinito para hallar valor excluido de "y"

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\infty} - \frac{6}{\infty^2}}{1 - \frac{4}{\infty^2}} = \frac{1 - 0 - 0}{1 - 0} = 1$$

Este valor es una asíntota horizontal, una recta y=1 a la cual se aproxima la curva de f(x) sin llegar a tocarla.

Otro valor prohibido del rango es la coordenada "y" del punto que no está definido en la gráfica, es decir 5/4

$$Rf = \left\{ y \in R: \ \ y \neq 1, \ \ y \neq \frac{5}{4} \right\}$$

Traducción: El dominio de la función consiste en todas las x que pertenecen a los números reales, de tal modo que x sea diferente de 2
y diferente de -2.

Asigna valores a x para obtener los de y sustituyendo en la función $f(x)$ original. Con esos valores construye una tabla de valores de x y de y, luego localiza los puntos en una hoja milimétrica. Esto te llevará tiempo, te sugiero usar cualquier software graficador, nosotros te recomendamos Geogebra.

Elaboró: Profe Raúl Vega Muñoz
Director de **CursoDeCalculo.com**