http://CursoDeCalculo.com
Profesor Raúl Vega Muñoz

Límites Difíciles Paso a Paso

... en proceso de edición... date una vuelta próximamente, lo verás completo

En este apartado vamos a resolver una selección de límites interesantes, los cuáles son un poco más complicados que los límites convencionales que hemos visto hasta ahora en ***CursoDeCalculo.com***, por eso les hemos dedicado atención especial. Estos son los límites que vamos a revisar en el presente ensayo:

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}$	$\lim_{x\to 8} \frac{2-\sqrt[3]{x}}{8-x}$						
Nótese que se pide solamente el límite por la derecha, lo que viene indicado con el pequeño signo +	Se resuelve por factorización pero es complicado.						

Para facilitar la comprensión, debemos realizar una **tablas de valores** para cada una de las funciones con las que vamos a trabajar al resolver límites. También es muy útil graficar cada una de las funciones, para entender mejor el resultado, para encontrarle un significado a los datos que obtenemos algebraicamente.

En el primer límite por ejemplo:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}$$

En realidad, estamos haciendo un análisis de la función racional:

$$f(x) = \frac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}$$

Cuya gráfica puedes observar a continuación:

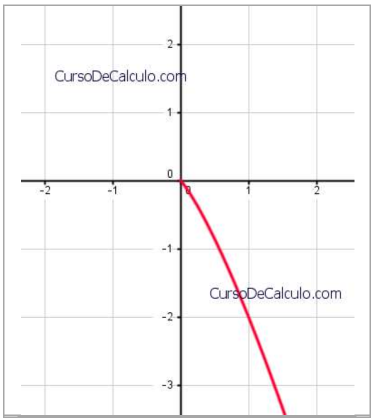


Figura 1

Debemos interpretar correctamente lo que “dice” la expresión algebraica:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x}{1 - \sqrt{x}}$$

Lo más importante que debes saber en cuanto a límites (*y que por alguna extraña razón los profesores nunca lo mencionan*) es que un límite es un valor de la variable $\boldsymbol{y}$, no de la $\boldsymbol{x}$. Así, lo que en realidad dice la expresión algebraica anterior es: “Calcular el valor al que se aproxima la variable $\boldsymbol{y}$ cuando los valores de la variable $\boldsymbol{x}$ se aproximan al número **1** desde la derecha.

Cuando decimos que los valores de $\boldsymbol{x}$ se aproximan a 1 desde la derecha, nos referimos a valores cercanos a 1 pero sin llegar a ese valor, solamente valores que se acerquen mucho, por ejemplo:

$$\boldsymbol{x = 2}$$
$$\boldsymbol{x = 1.9}$$
$$\boldsymbol{x = 1.8}$$
$$\boldsymbol{x = 1.7}$$
$$\boldsymbol{x = 1.6}$$
$$\boldsymbol{x = 1.5}$$
$$\boldsymbol{x = 1.4}$$
$$\boldsymbol{x = 1.3}$$
$$\boldsymbol{x = 1.2}$$
$$\boldsymbol{x = 1.1}$$
$$\boldsymbol{x = 1.09}$$
$$\boldsymbol{x = 1.08}$$
$$\boldsymbol{x = 1.07}$$

... y podremos asignarle valores a $\boldsymbol{x}$ tan cercanos a 1 como quisiéramos, incluso valores tan extremos como

$$\boldsymbol{x = 1.0000000000000000001}$$

muy cercano a 1 sin llegar a ser 1.

Ahora bien, debemos obtener el correspondiente valor de $\boldsymbol{y}$ para cada uno de los valores que le asignemos a $\boldsymbol{x}$ llenando así una tabla de valores. Para facilitar las cosas hemos elegido algunos valores de $\boldsymbol{x}$ que son convenientes y fáciles de operar.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
$\mathbf{1.2}$	
$\mathbf{1.1}$	
$\mathbf{1.05}$	
$\mathbf{1.01}$	
$\mathbf{1.005}$	
$\mathbf{1.001}$	
$\mathbf{1}$	No Interesa

Ahora llenamos los espacios faltantes para la $\boldsymbol{y}$ sustituyendo los valores asignados a x en la función original. Por ejemplo, para $\boldsymbol{x} = \mathbf{1.2}$

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{1 - \sqrt{x}}$$

$$f(1.2) = \frac{(1.2)^2 - (1.2)}{1 - \sqrt{(1.2)}} = \frac{1.44 - 1.2}{1 - 1.095} = -2.52$$

Lo mismo tienes que realizar para los demás valores que asignamos a $\boldsymbol{x}$. Te recomiendo realizarlo, y compara tus resultados con los que presentamos en la tabla ya completa:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
$\mathbf{1.2}$	-2.52
$\mathbf{1.1}$	-2.25
$\mathbf{1.05}$	-2.12
$\mathbf{1.01}$	-2.02
$\mathbf{1.005}$	-2.01
$\mathbf{1.001}$	-2.002
$\mathbf{1}$	No Interesa

Observamos que a medida que la x se aproxima a 1 desde la derecha la y se aproxima a -2 desde abajo. Con lo cual concluimos que el resultado del límite es -2.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x}{1 - \sqrt{x}}$$

Esto quiere decir, el valor al cual se aproxima la variable Y desde abajo, mientras la variable x se aproxima a 1 desde la derecha.

$$\lim_{x\to 8}\frac{2-\sqrt[3]{x}}{8-x}$$

En este otro límite, si hiciéramos la sustitución directa obtendríamos indeterminación 0/0, para evitarla podemos factorizar considerando al denominador $8-x$ como una diferencia de cubos perfectos a^3-b^3, (tenemos que hacer uso de nuestra imaginación), que además guarda estrecha relación con los términos del numerador, ya que 8 es el cubo de 2 y por otra parte x es el cubo de $\sqrt[3]{x}$ por lo que la expresión

$$\frac{2-\sqrt[3]{x}}{8-x}$$

Sería aproximadamente equivalente a la expresión más sencilla:

$$\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}^3-\mathrm{b}^3}$$

Esta última se puede simplificar de la siguiente forma: Una diferencia de cubos perfectos se factoriza así:

$$\mathrm{x}^3-\mathrm{y}^3=(\mathrm{x}-\mathrm{y})(\mathrm{x}^2+\mathrm{xy}+\mathrm{y}^2)$$

Por lo que la expresión

$$\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}^3-\mathrm{b}^3}$$

Es equivalente a:

$$\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}^2+\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2)}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{\mathrm{a}^2+\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2}$$

Ahora, siguiendo la misma lógica, vamos a simplificar la expresión contenida en el límite que queremos resolver

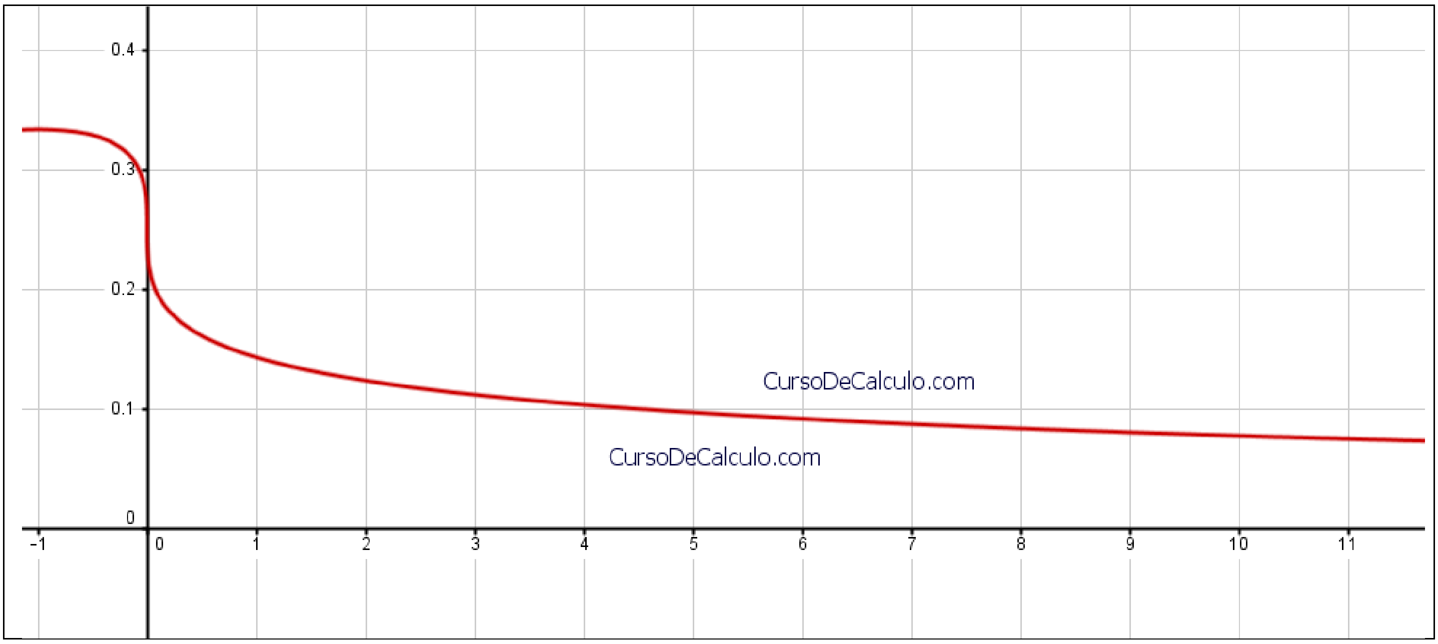
$$\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}^3-\mathrm{b}^3}=\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}^2+\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2)}=\frac{1}{\mathrm{a}^2+\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2}$$

$$\frac{2-\sqrt[3]{x}}{8-x}=\frac{2-\sqrt[3]{x}}{(2-\sqrt[3]{x})(4+2\sqrt[3]{x}+x^2)}=\frac{1}{4+2\sqrt[3]{x}+x^2}$$

Por lo cual el límite quedaría de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 8}\frac{2-\sqrt[3]{x}}{8-x}=\lim_{x\to 8}\frac{2-\sqrt[3]{x}}{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)\left(4+2\sqrt[3]{x}+x^2\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{1}{4+2\sqrt[3]{x}+x^2}=\frac{1}{4+2\sqrt[3]{8}+8^2}=\frac{1}{4+2(2)+64}=\frac{1}{72}\approx 1.013$$

Y esto lo podemos verificar gráficamente porque a medida que la x se aproxima a 8 (tanto por la izquierda como por la derecha) el valor de Y tiende a 1/72 o su valor aproximado 0.013



$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(2x-4)}{4x-8}$$

Al hacer la sustitución directa observamos que se obtiene una indeterminación

$$\frac{\operatorname{sen}(0)}{0}=\frac{0}{0}$$

Sin embargo podemos recurrir al siguiente ***Teorema 1***:

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}=1$$

Nota: Utilizo el símbolo griego theta aunque otros autores pueden usar otras letras.

Lo importante es que observes que en la expresión del límite que queremos resolver

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(2x-4)}{4x-8}$$

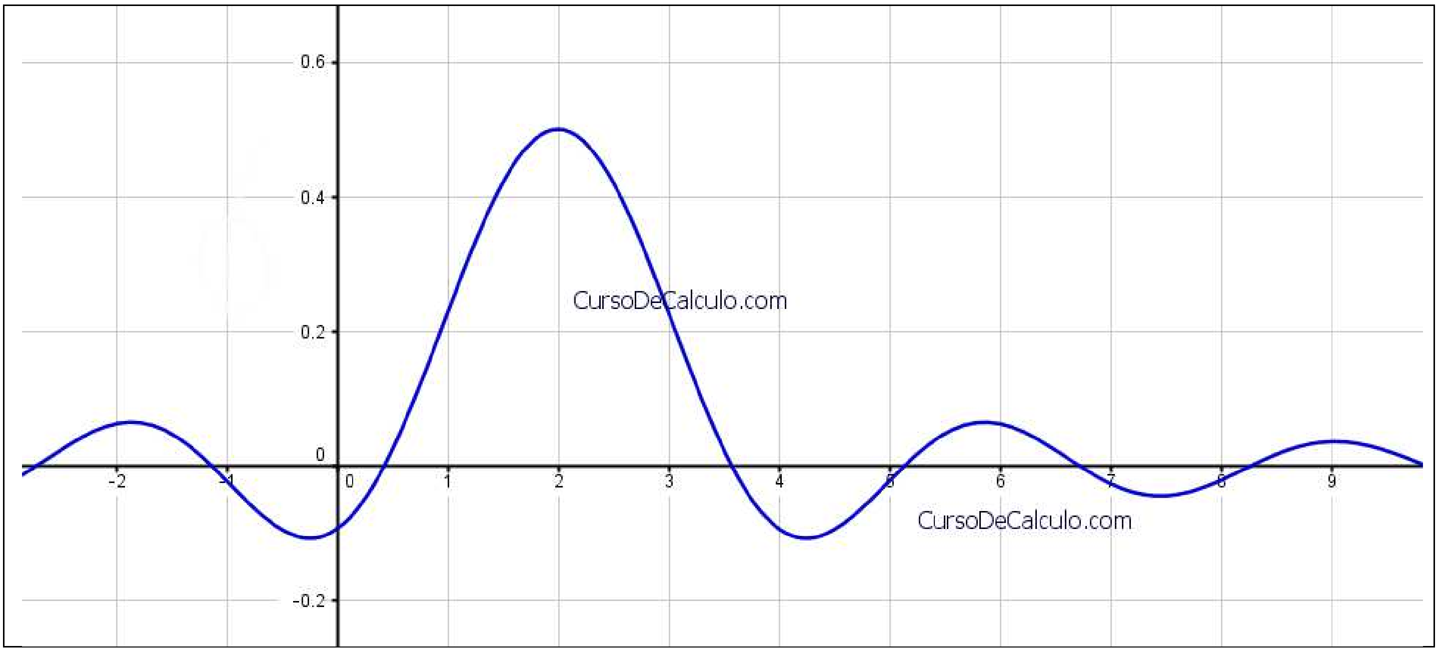
podemos extraer factor común al denominador $4x - 8 \quad \Rightarrow \quad 2(2x - 4)$ lo que hace la expresión equivalente a:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{2} \left(\frac{\text{sen}(2x - 4)}{2x - 8} \right)$$

Ahora si empleamos una sustitución de variable, donde $\theta = 2x - 4$, y por el ***teorema 1*** tendremos lo siguiente:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{2} \left(\frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} \right) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

Para verificar nuestro resultado observemos la gráfica:



En la gráfica podemos observar que a medida que x tiende a 2 (tanto por la izquierda como por la derecha), el valor de y tiende a 0.5 (que es lo mismo que 1/2).

$$\lim_{x \to 1} \frac{\text{sen}(x - 3)}{x^2 - 6x + 9}$$

Por intuición, podemos suponer que vamos a emplear el mismo ***teorema 1*** que en el caso anterior:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = 1$$

Referencias: Leithold Calculo 7ª. Ed.   p.87 Teorema 1.10.2 Nota: El teorema como tal no tiene nombre específico como el Teorema de Pitágoras, por eso diferentes autores lo denominan simplemente teorema y un número cualquiera.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(x-3)}{x^2-6x+9}$$

El denominador se puede factorizar fácilmente

$$x^2-6x+9=(x-3)(x-3)$$

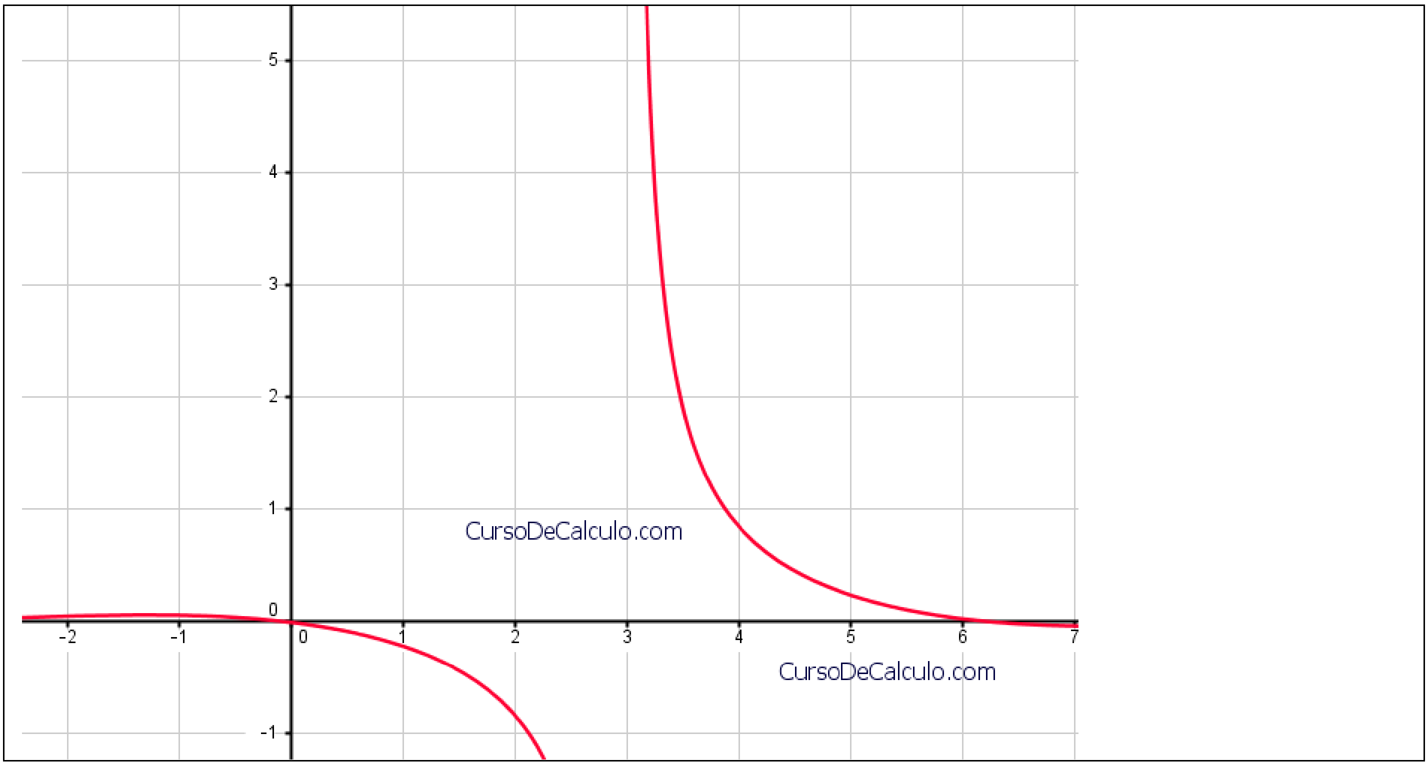
Por lo que la expresión

$$\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(x-3)}{x^2-6x+9}$$

Es equivalente a

$$\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(x-3)}{(x-3)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \left[\frac{\operatorname{sen}(x-3)}{(x-3)}\right]\left[\frac{1}{(x-3)}\right] = [1]\left[\frac{1}{3-3}\right] = [1]\left[\frac{1}{0}\right] = \infty$$

Por lo cual, el límite no existe como tal, porque la función (o sea la Y) se aproxima a infinito positivo. Veamos esta conducta en la gráfica:



En la gráfica se puede apreciar claramente que cuando el valor de x tiende a 3 por la derecha, el valor de la función tiende al Infinito positivo, mientras que cuando el valor de x tiende a 3 por la izquierda, el valor de la función tiende a infinito negativo.

Los límites por la izquierda y por la derecha NO SON IGUALES en el caso de esta función, entonces no cumple los 3 criterios de la existencia de un limite. Se concluye que NO EXISTE LIMITE.

Si no hubiésemos graficado la función no hubiéramos sabido esto, pero podríamos haberlo sabido mediante una tabla de valores próximos a 3 tanto por la izquierda como por la derecha,. Con esto podemos ver que no es suficiente el método algebraico, siempre es conveniente graficar y complementar con una tabla de valores.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x}$$

Si aplicáramos la sustitución directa en este caso tendríamos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(0-\frac{\pi}{2}\right)}{0}=\frac{\cos(0-90°)}{0}=\frac{\cos(-90°)}{0}=\frac{0}{0}$$

Para evitar la indeterminación vamos a recurrir a la fórmula de coseno de la diferencia de dos ángulos:

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$$

REFERENCIA: Wikipedia.org Nota: otros autores usan otros símbolos en lugar e las letras A y B que utilizamos en este ensayo, eso no cambia la fórmula.

Por lo que la expresión $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ es equivalente (dentro de intervalos específicos) a:

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=(\cos x)\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)+(\operatorname{sen} x)\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

Conocemos los valores exactos de las funciones trigonométricas de ángulos notables (Fuente: **ClasesDeMatematicas.org**)

http://clasesdematematicas.org/page_download/download.html

De donde: $\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1$ por lo que obtenemos:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=(\cos x)(0)+(\operatorname{sen} x)(1)=0+\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} x$$

Entonces la expresión original del límite que pretendemos resolver es equivalente a:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1$$

Por el teorema previamente citado.